INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://balkanski-foundation.org/

Concours Général de Physique "Minko Balkanski"

15 Mai 2016

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и кратки. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете **без да повдигате въпроси към квесторите.**

Класирането ще бъде изложено на сайта **http://balkanski-foundation.org/** в началото на месец юни. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към **svilen.iskrov@gmail.com**. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Бъдете сигурни да попълните правилно информацията за контакт.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie
Français

1 Mouvement d'une bille dans une cuve (10 pts)

Un point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire est solidaire d'une cuve circulaire (de centre O et de rayon R) sur laquelle il peut glisser sans frottement. Il est fixé en un point B du plan horizontal par l'intermédiaire d'un élastique modélisé par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Le bord de la rigole est à la distance l_0 du point B.

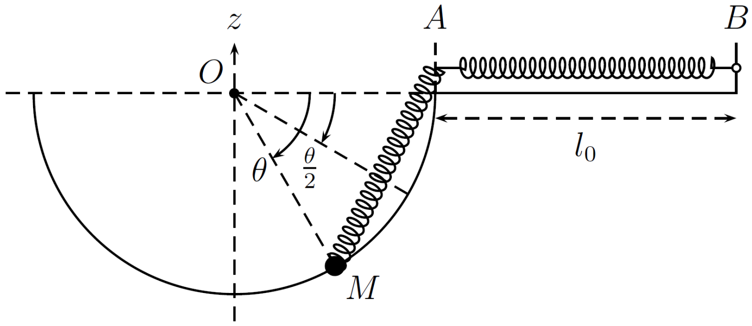

Figure 1 : Bille dans une cuve

1.1 Application de la relation fondamentale de la dynamique

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point matériel.
2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique.
3. Montrer que θ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin(\theta) - \frac{g}{R}\cos(\theta) = 0$$

4. Exprimer la réaction normale N en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées temporelles.

1.2 Analyse énergétique

1. En introduisant H, le projeté du point O sur la droite (AM), donner une expression de l'allongement $X = l - l_0$ du ressort en fonction de R et de $\frac{\theta}{2}$.
2. Donner l'expression des différentes énergies potentielles intervenant dans le problème, en fonction de $\theta(t)$.
3. Déterminer à partir des énergies potentielles la position d'équilibre θ_0.
4. Retrouver l'équation différentielle donnant l'évolution de θ au cours du temps à l'aide d'un raisonnement énergétique.

1.3 Mouvement autour de la position d'équilibre

Dans le cadre des petites oscillations, on pose $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \ll \theta_0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$. On utilisera les approximations suivantes : pour $x \ll 1$, on a $\cos(x) \simeq 1$ et $\sin(x) \simeq x$.
2. Quelle est la période de ces petites oscillations ?

On ne suppose plus les oscillations petites.

3. Tracer l'énergie potentielle totale $E_{p\,tot}(\theta)$ en prenant pour échelle $5cm$ pour $0,125J$, en ordonnée, et $4cm$ pour 30°,en abscisse. Valeurs numériques : $m = 50g$, $g = 10m.s^{-2}$, $k = 2N.m^{-1}$ et $R = 25cm$.
4. En lâchant la bille sans vitesse initiale depuis le point A, déterminer graphiquement les positions extrêmes atteintes lors du mouvement. On explicitera le raisonnement.

2 Etude d'un gaz de photons (3 pts)

À l'intérieur d'une cavité vide dont les parois sont à l'équilibre thermique, il existe des ondes électromagnétiques dont l'intensité et la répartition des fréquences dépend de la température. À une onde électromagnétique on associe des particules appelées photons et on considère que ceux-ci se comportent comme un gaz. Des considérations théoriques amènent à poser l'expression de l'entropie comme fonction du volume et de l'énergie :

$$S(V, U) = \frac{4}{3}(\sigma_0 V U^3)^{\frac{1}{4}}$$

Avec σ_0 une constante universelle égale à :

$$\sigma_0 = 7,56.10^{-16} J.m^3.K^{-4}$$

1. En déduire la relation entre l'énergie, le volume et la température, puis la relation entre pression et température.
2. La cavité, de volume $V = 1L$ contient 1 mole de dihydrogène. Pour quelle température la pression de radiation est-elle égale à la pression exercée par les particules matérielles (on supposera que, pour les températures très élevées, les molécules de H_2 sont décomposées en protons et en électrons qui se comportent comme des gaz parfaits monoatomiques).
3. Déterminer la capacité thermique à volume constant associée au rayonnement.

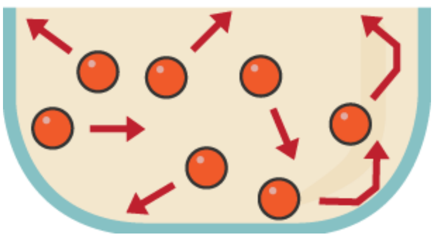

Figure 2 : Particules d'un gaz

3 Conduction dans le germanium et l'effet Hall(7 pts)

3.1 Vitesse limite

Un électron, de charge $-e$, de masse m, est émis avec une vitesse initiale nulle dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\overrightarrow{E}_0$. L'électron est, en outre, soumis à l'action d'une force de frottement (de type fluide) due à l'action du milieu dans lequel il se déplace :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$$

Son mouvement est décrit dans un référentiel galiléen (O, x, y, z), de base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ dans lequel $\overrightarrow{E}_0 = E\overrightarrow{u_x}$. On néglige l'action de la pesanteur.

1. Écrire l'équation différentielle du mouvement de l'électron. Quelle est l'unité de la constante τ ?
2. Donner l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en fonction du temps.
3. Montrer qu'il tend vers une limite $\overrightarrow{v}_\infty$ que l'on exprimera.
4. Exprimer le temps au bout duquel l'électron atteint cette vitesse limite à 1% près.

3.2 Résistivité électrique

Le germanium est un bon isolant électrique. Lorsqu'on introduit des impuretés en très faible concentration, par exemple de l'antimoine (Sb), la conductivité électrique du germanium augmente fortement : on obtient un semi-conducteur « dopé », noté $Ge : Sb$ dont les propriétés électriques dépendent à la fois du nombre d'atomes Sb introduits par unité de volume, N, et de la température T. On propose le modèle suivant de conduction dans le germanium dopé : dans Ge pur, tous les électrons sont engagés dans des liaisons chimiques et ne peuvent participer à la conduction électrique. On suppose que lorsqu'on dope Ge par Sb, à raison de N atomes de Sb par unité de volume, à température ambiante, chaque atome Sb « libère » un électron du réseau cristallin. Sous l'action d'un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}_0$, les charges libres sont animées d'un mouvement de vitesse $\overrightarrow{v}$. On modélise l'action des atomes ou des ions du réseau sur ces charges par une force de frottement du type précédent.

1. Exprimer, en régime permanent, le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$. En déduire l'expression de la résistivité électrique ρ_e de $Ge : Sb$ en fonction de m, N, e et τ .
2. On mesure la résistivité $\rho_e = 1,22.10^{-2}\Omega.m$ pour un échantillon de « concentration » $N = 1,6.10^{21}m^{-3}$. Calculer le nombre d'atomes de germanium par m^3 d'échantillon. En déduire le taux d'atomes d'antimoine, c'est-à-dire le nombre d'atomes de Sb par atome de Ge. Calculer τ dans le cadre du modèle précédent. Que pensez-vous du résultat obtenu à la question 3.1.2 ?

Données : $N_A = 6,02.10^{23}mol^{-1}$, $e = 1,6.10^{-19}C$, $m = 9,1.10^{-31}kg$, $M = 72,6g.mol^{-1}$, $\mu = 5,32.10^3kg.m^{-3}$.

3.3 Effet Hall

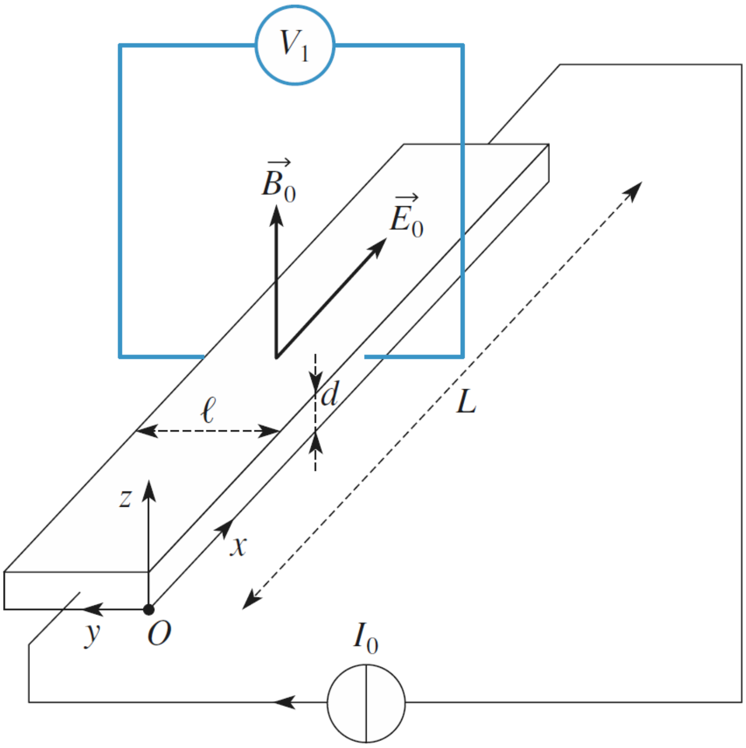

Figure 3 : Echantillon $Ge : Sb$ dans un champ magnétique

On s'intéresse maintenant à la conduction électrique de l'échantillon de $Ge : Sb$, étudié précédemment, dans un champ électrique et un champ magnétique croisés. On se replace dans le cadre du modèle décrit à la question 3.2. On découpe $Ge : Sb$ sous forme d'un ruban de longueur $L = 20mm$ parallèle à l'axe (Ox), de section rectangulaire de largeur $l = 1mm$ parallèle à (Oy) et d'épaisseur $d = 0,2mm$ parallèle à (Oz). Un générateur de courant délivrant un courant d'intensité constante I_0 disposé en série suivant la ligne de plus grande longueur crée un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}_0$ d'axe (Ox). On place l'échantillon dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}_0$ constant d'axe (Oz) colinéaire à l'épaisseur.

1. Montrer que $E_0 = \frac{\rho_e I_0}{ld}$.
2. Montrer qualitativement que la vitesse de dérive des électrons libres entraîne l'apparition d'une distribution de charges sur les bords du matériau. Cette distribution crée alors un champ électrique $\overrightarrow{E}_1$, considéré comme uniforme, colinéaire à l'axe(Oy).
3. En régime permanent, les conditions aux limites du matériau imposent que le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ soit colinéaire à l'axe de plus grande longueur (Ox). Écrire l'équation du mouvement d'un électron libre. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E}_1$ en fonction des données de l'exercice.
4. Calculer la différence de potentiel V_1 (donnée par $V_1 = -E_{1y}l$) que l'on peut mesurer entre les deux bords de l'échantillon, de part et d'autre de sa largeur, pour $I_0 = 10mA$ et $B_0 = 0,1T$. Quelle application voyez-vous du phénomène étudié ?

Part II
English

1 A ball in a bowl (10 pts)

Small ball M with mass m is sliding without friction in a spherical bowl with center O and radius R. The ball is fixed on one end (point B) of the horizontal plane with an elastic rope, which can be modeled by a spring with a force constant k and an equilibrium length l_0. The edge of the bowl is at a distant l_0 from point B.

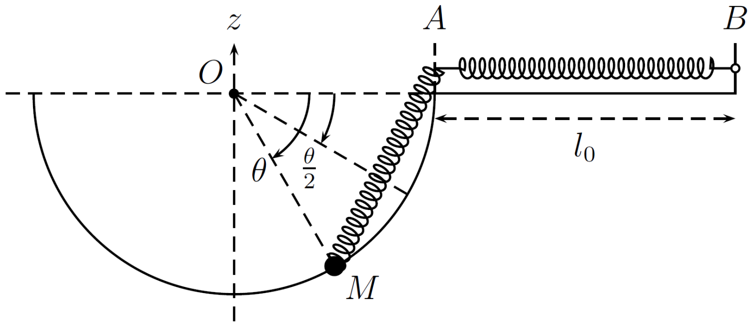

Figure 1 : Ball in a bowl

1.1 Newton's second law

1. List and sketch on a separate sheet all forces applied to the ball.
2. Apply the Newton's second law.
3. Show that θ respects the following differential equation :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin(\theta) - \frac{g}{R}\cos(\theta) = 0$$

4. Derive the reactive force N, as a function of $\theta(t)$ and its derivatives.

1.2 Energy principal

1. Using H, the projection of point O on the line (AM), find the elongation of the spring $X = l - l_0$ in terms of R and $\frac{\theta}{2}$.
2. What is the expression of the total potential energy of the system as a function of $\theta(t)$?
3. Identify the equilibrium angle θ_0.
4. Derive the equation in 1.1.3. by using the expression of the total energy of the system.

1.3 Dynamics of the equilibrium state

Let us suppose that the ball is oscillating with small amplitude near the equilibrium state. We can use the following expression : $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$, with $\varepsilon(t) \ll \theta_0$.

1. What is the differential equation satisfied by $\varepsilon(t)$. For $x \ll 1$, we can assume that $\cos(x) \simeq 1$ and $\sin(x) \simeq x$.
2. What is the period of the small oscillations ?

Now, we assume that the oscillations are no longer with small amplitude.

3. Sketch the total potential energy $E_{p\,tot}(\theta)$ in a reference frame with $5cm$ per $0,125J$, for the y coordinates, and $4cm$ per 30°, for the x coordinates. Numerical values : $m = 50g$, $g = 10m.s^{-2}$, $k = 2N.m^{-1}$ and $R = 25cm$.
4. The ball is left without initial speed at point A, identify graphically the maximum and minimum displacement angles throughout the movement.

2 Gas of photons (3 pts)

Inside an empty box with thermally stabilized walls, there are electromagnetic waves with intensity and frequency spectrum which depend on the temperature. With each wave we can associate particles called « photons » and consider that they react as classical gas particles. From theoretical standpoint, we can show that the entropy of the system could be written as a function of the volume and the internal energy :

$$S(V,U) = \frac{4}{3}(\sigma_0 V U^3)^{\frac{1}{4}}$$

Where σ_0 is an universal constant equal to :

$$\sigma_0 = 7,56.10^{-16} J.m^3.K^{-4}$$

1. Find out the expression which links the energy, the volume and the temperature. What about the pressure and the temperature ?
2. The box with volume $V = 1L$ contains 1 mole of hydrogen. Assuming that for high temperatures H_2 molecules are decomposed into protons and electrons (considered perfect monoatomic gases), what is the temperature for which the pressure of the electromagnetic radiation is equal to the pressure of the decomposed particles.
3. What is the thermal capacity, at constant volume, associated with the electromagnetic radiation ?

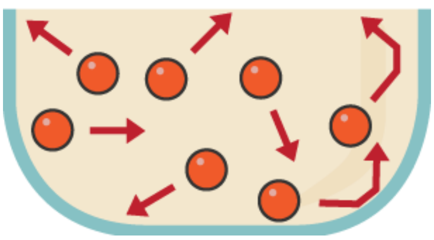

Figure 2 : Gas particles

3 Electronic properties of doped germanium (7 pts)

3.1 Maximum speed

An electron with charge$-e$ and mass m, is emitted without initial speed in a region with uniform and constant electric field $\overrightarrow{E}_0$. The electron is also a subject to a friction force applied by the medium :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$$

Lets assume that (O, x, y, z) is an inertial frame of reference, with basis vectors ($\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$) and $\overrightarrow{E}_0 = E\overrightarrow{u_x}$. We can neglect the gravitational forces.

1. Write down the differential equation of the electron movement. What are the units of the constant τ ?
2. Provide an expression of the speed vector $\overrightarrow{v}$ as a function of the time.
3. Show that there exist a maximum speed $\overrightarrow{v}_\infty$ and give its expression.
4. What is the time needed to reach 99% of the maximum speed ?

3.2 Electrical resistivity

The germanium is a good insulator. When we inject a small amount of impurities, for example antimony, the germanium electric conductivity increases tremendously : we obtain a doped semiconductor, noted $Ge : Sb$, whose electric properties depend on the number of atoms Sb per volume, N, and the temperature T. Let us suppose the following model : in pure Ge all electrons are fixed in chemical bonds and could not conduct electricity ; when we dop Ge with Sb, N atoms per volume, at ambient temperature, each atom Sb provides one « free » electron. In a constant and uniform field $\overrightarrow{E}_0$, the « free » charges start moving with speed $\overrightarrow{v}$. We can assume that action of the atoms and ions in the lattice is similar to the force shown in 3.1.

1. Assuming a steady state, what is the expression of the current density vector $\overrightarrow{j}$? What is the electrical resistivity ρ_e of the semiconductor $Ge : Sb$ as a function of m, N, e and τ.
2. We measure $\rho_e = 1,22.10^{-2}\Omega.m$ for a samples with « concentration » $N = 1,6.10^{21}m^{-3}$. What is the number of germanium atoms per m^3 in the sample ? Find out the ratio of antimony atoms Sb to germanium atoms Ge in the sample. What is the value of τ ? What can be concluded for the result in 3.1.2 ?

Numerical values : $N_A = 6,02.10^{23}mol^{-1}$, $e = 1,6.10^{-19}C$, $m = 9,1.10^{-31}kg$, $M = 72,6g.mol^{-1}$, $\mu = 5,32.10^3kg.m^{-3}$.

3.3 Hall Effect

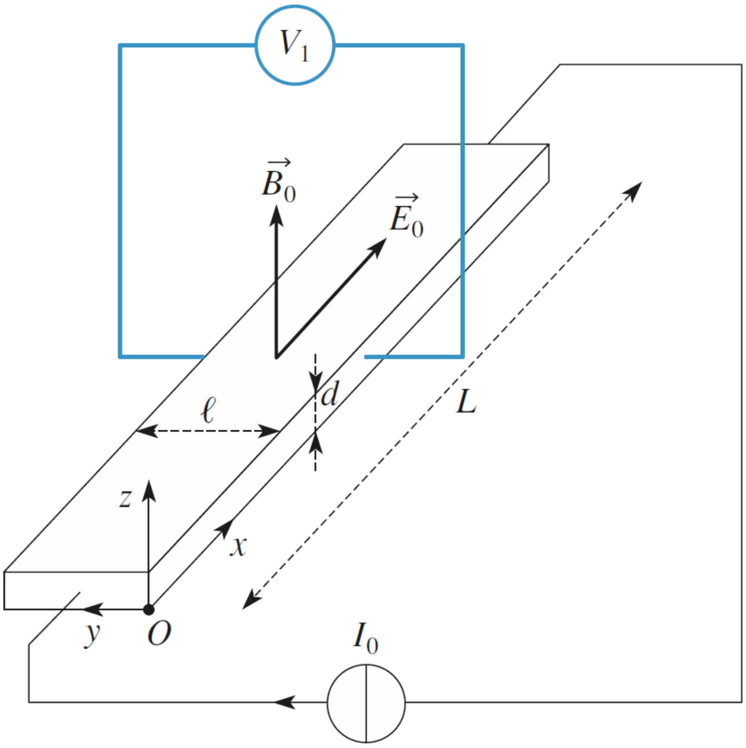

Figure 3 : $Ge : Sb$ sample immersed in uniform magnetic field

We would now study the electrical conduction of a $Ge : Sb$ sample immersed not only in an electrical, but also in a magnetic field. The experimental setup includes the same $Ge : Sb$ semiconductor as in 3.2 in the form of a rectangular parallelepiped with the following dimensions : $L = 20mm$ (Ox), $l = 1mm$ (Oy), $d = 0,2mm$ (Oz). A current source of constant intensity I_0, connected in series, creates an uniform field $\overrightarrow{E}_0$ parallel to the (Ox) axis. A constant magnetic field $\overrightarrow{B}_0$ is applied in the (Oz) axis.

1. Show that $E_0 = \frac{\rho_e I_0}{ld}$.
2. Explain qualitatively why the « free electrons » create a distribution of the charges on the semiconductor surface ? This distribution induces an electrical field $\overrightarrow{E}_1$, assumed as uniform, parallel to the (Oy) axis.
3. In the stedy state, the boundary conditions suppose an current vector $\overrightarrow{j}$ parallel to the (Ox) axis. Write down the equation of motion on a « free electron ». What is the expression of $\overrightarrow{E}_1$, as a function of the given parameters ?
4. Calculate the electric potential V_1 (defined as $V_1 = -E_{1y}l$) which one can measure between the surfaces of the sample, for $I_0 = 10mA$ and $B_0 = 0,1T$. What possible applications of the studied phenomenon you could suggest ?